



オイラーの長柱座屈

Buckling column by Euler's formula

R02/2023/05, Abaqus6.7-1, Analysis Level:★★

提供されるデータ：ソルバーの入力ファイル

構造物に圧縮荷重が加わると限界の荷重を越えたときに座屈と呼ばれる現象が発生し、構造物は崩壊に至る。このときの限界荷重は引っ張りの状態から推定される破壊荷重（例えば塑性化による破壊など）よりも一般的には低い。そのため建築などの構造物ではその健全性を評価するための重要な指標となっている。一般に座屈の問題は幾何学的非線形問題と呼ばれ、通常の線形弾性問題とは異なり、構造内部に発生している応力と変位に対して構造物の剛性が依存する問題となっている。非常に粗雑な言い方をすれば、圧縮応力によって構造物の見かけの剛性が低下し、ヤング率と初期寸法から定まる構造物の生来の剛性が失われたとき、構造物は自立してことができなくなり座屈崩壊する。ここでは最も単純な座屈の例としてオイラーの長柱座屈を取り上げFEM解析と比較する。要素タイプとしてはソリッド要素を使用し、塑性化による影響を合わせて検討する。

理論解 中原, 実践材料力学, p.136-140 参照⁽¹⁾.

Fig.1 に示すような一端を固定した長柱に軸方向の強制変位を加え座屈させるとき、柱に発生する座屈応力を求めオイラーの式と一致することを確認する。諸元は以下の通りである。ここでは、細長比を変えた5ケースについて検討する。

柱の長さ $l = 1000$ [mm] 断面形状は正方形とし、寸法を Table.1 に示す。
 ヤング率 $E = 203$ [GPa] ポアソン比 $\nu = 0.3$ 降伏応力 $\sigma_{yp} = 310$ [MPa]

材料力学による解は以下の通りである。

1. 座屈問題では変形した状態での力のつりあいを考えなければならない。
 固定端から x 離れた点は w だけたわんでいるので作用する曲げモーメントは

$$M = -P(w_0 + e - w) \quad \dots (1)$$

2. たわみ曲線の微分方程式 $\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ は、次のようになる。

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = P(w_0 + e - w) \quad \dots (2)$$

3. (2)式より荷重 P を導出し、Fig.2 に示すような、一端固定の座屈荷重を求めると

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (\text{一端固定, 他端自由}) \quad \dots (3)$$

4. ここでは、両端の回転が自由であるので次式となる。

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{両端回転自由}) \quad \dots (4)$$

5. 長柱の座屈に関する(3), (4)の式はオイラーの式と呼ばれ、一般に

$$P_{cr} = n \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \dots (5)$$

と表すことができ、定数 n は、端末条件によって値が異なる。

6. 理想的な座屈においては、座屈直前に柱に作用する応力、つまり座屈応力は

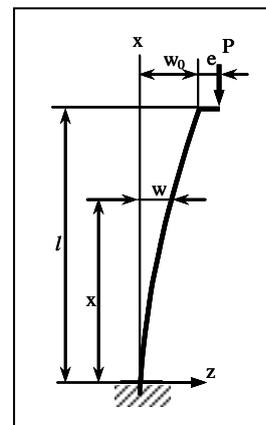


Fig.1 長柱のたわみ

Table.1 断面寸法

No	一辺の長さ [mm]
CASE-1	80
CASE-2	60
CASE-3	42
CASE-4	35
CASE-5	25

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = n\pi^2 E \left(\frac{k}{l}\right)^2, \quad k^2 = \frac{I}{A} \quad \dots (6)$$

7. 本例題での各 CASE の細長比 l/k における解を Table.2 に示す。
 同じ材料ならば、細長比が小さいほど座屈応力は大きい。

Table.2 座屈応力

No	細長比 [-]	座屈応力 [MPa]
CASE-1	43.3	1,069
CASE-2	57.7	601
CASE-3	82.5	295
CASE-4	99.0	205
CASE-5	138.6	104

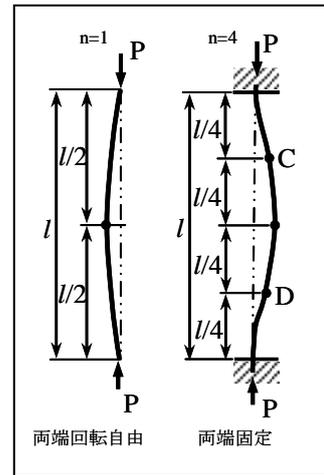


Fig.2 端末状態と座屈形

解析条件

Fig.3 に解析モデルを示す。

- 要素：四辺形平面応力要素 CPS4I
- 材料定数：ヤング率 $E = 2.03 \times 10^5$ [MPa]
 ポアソン比 $\nu = 0.3$
 降伏応力 $S_y = 310$ [MPa]
- 荷重： $P = 10 \sim 1,000$ [N]
- 変位量：荷重を加えた後、 x 方向に 4 [mm] 圧縮

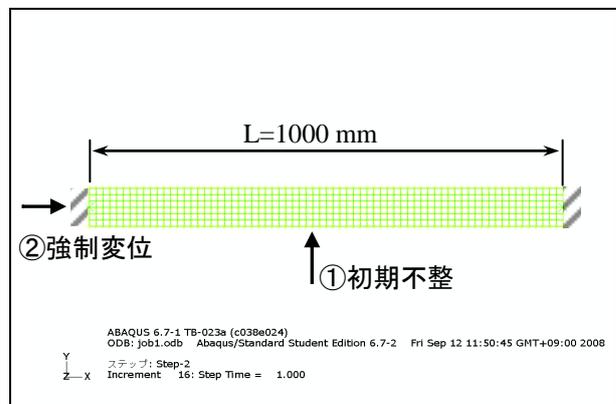


Fig.3 解析モデル

解析結果

Fig.4~6 に Abaqus の解析結果を示す。また得られた結果をまとめて Table.3 に示す。



Fig.4 変形図

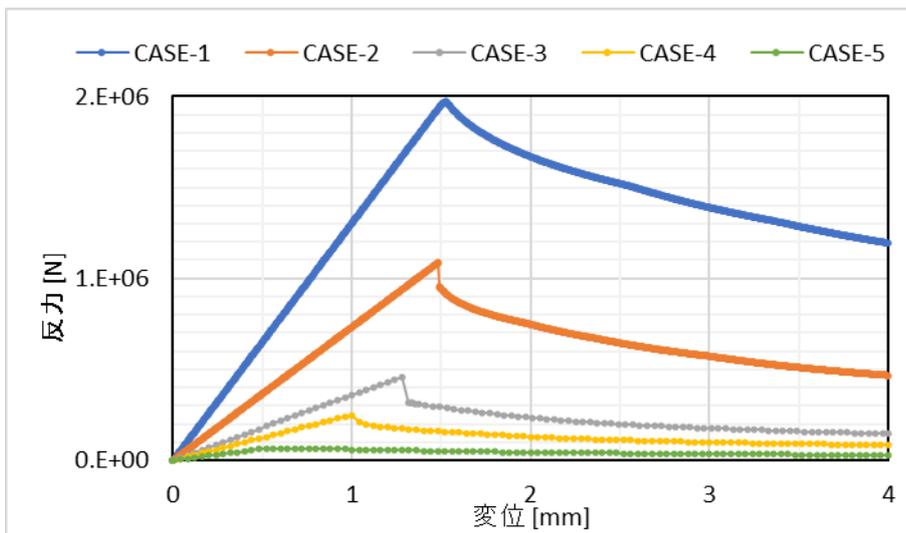


Fig.5 反力-変位関係

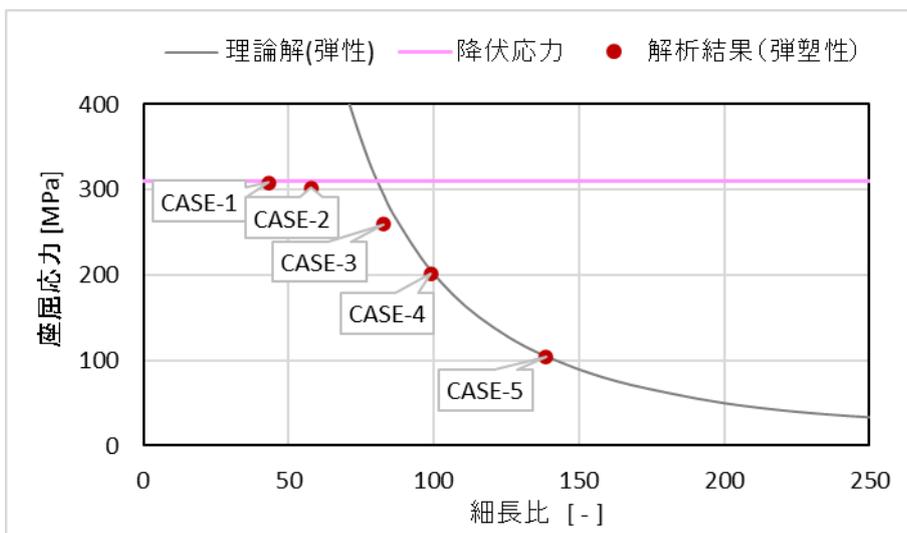


Fig.6 細長比-座屈応力関係

Table.3 理論解と解析結果の比較

No	細長比 [-]	座屈応力 [MPa]		Abaqus/理論解
		理論解	FEM 解	
CASE-1	43.3	310(降伏応力)	308	0.994
CASE-2	57.7	310(降伏応力)	302	0.974
CASE-3	82.5	295	260	0.881
CASE-4	99.0	205	201	0.980
CASE-5	138.6	104	104	1.000

参考文献

(1) 中原, 実践材料力学, 養賢堂, 2002.

※ Abaqus は Dassault Systemes Simulia Corp.殿の製品です.

株式会社 メカニカルデザイン

〒182-0024 東京都調布市布田 1-40-2 アクシス調布 2 階

TEL 042-482-1539 FAX 042-482-5106

E-mail : comm@mech-da.co.jp <https://www.mech-da.co.jp>